Colle du 07/02 - Sujet 1
Ensembles, applications, continuité, dérivation

Question de cours. Démontrer que l'image d'un intervalle par une fonction...

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall B \in \mathscr{P}(F)$, $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Colle du 07/02 - Sujet 2
Ensembles, applications, continuité, dérivation

Question de cours. Démontrer l'unicité de la limite.

Exercice 1. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que f est dérivable en 0.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Colle du 07/02 - Sujet 3
Ensembles, applications, continuité, dérivation

Question de cours. Démontrer les deux assertions suivantes :

1. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 1. Soient $a < b$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) > 0$. Démontrer qu'il existe $C > 0$ telle que $\forall x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant C$.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que

$$f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; f(A) \cap f(B) = \emptyset.$$